Homework 2.

1. (a) $r = S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3$

$K=3,\ J=1$

$$f_{R|H_0}(r|H_0) = 2^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{d_2\in\{-1,1\}} \sum_{d_3\in\{-1,1\}} e^{-\frac{(r+1-\sum_{k=2}^{3} C_k d_k)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(r+1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

$$f_{R|H_1}(r|H_1) = 2^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{d_2\in\{-1,1\}} \sum_{d_3\in\{-1,1\}} e^{-\frac{(r-1-\sum_{k=2}^{3} C_k d_k)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(r-1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

(b)
$$f_R(r) = \sum_{j=0}^{1} P_j \, f_{R|H_j}(r|H_j)$$

$$= \frac{1}{2} f_{R|H_0}(r|H_0) + \frac{1}{2} f_{R|H_1}(r|H_1)$$

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(r+1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

(c) $$P_r[H_0 | r] = \frac{P_0 \, f_{\mathbb{R}|H_0}(r|H_0)}{f_{\mathbb{R}}(r)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \, f_{\mathbb{R}|H_0}(r|H_0)}{f_{\mathbb{R}}(r)}$$

$$P_r[H_1 | r] = \frac{P_1 \, f_{\mathbb{R}|H_1}(r|H_1)}{f_{\mathbb{R}}(r)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \, f_{\mathbb{R}|H_1}(r|H_1)}{f_{\mathbb{R}}(r)}$$

2. $$f_{R|H_0}(r=0|H_0) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left[e^{-\frac{(1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$f_{R|H_1}(r=0|H_1) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left[e^{-\frac{(1-C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1-C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1+C_2-C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1+C_2+C_3)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

Since $f_{R|H_0}(r=0|H_0) = f_{R|H_1}(r=0|H_1)$

$r=0$ is the decision boundary for all $C_2, C_3$.

3. $$P_e = P_r(D_1|H_0) + P_r(D_0|H_1)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f_{R|H_0}(r|H_0)\,dr + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f_{R|H_1}(r|H_1)\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1-C_2-C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1-C_2+C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1+C_2-C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1+C_2+C_3}{\sigma}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1+C_2+C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1+C_2-C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1-C_2+C_3}{\sigma}\right) + \frac{1}{4}\phi\left(\frac{-1-C_2-C_3}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\phi\Big(\frac{-1+C_2+C_3}{\sigma}\Big) + \phi\Big(\frac{-1+C_2-C_3}{\sigma}\Big)$$
$$+ \phi\Big(\frac{-1-C_2+C_3}{\sigma}\Big) + \phi\Big(\frac{-1-C_2-C_3}{\sigma}\Big)\Big]$$

4. (a) $r = S_{1,p} + 0.7\, S_{1,p-5} + C_2\, S_{2,p} + 0.7\, C_2\, S_{2,p-5}$
$+ C_3\, S_{3,p} + 0.7\, C_3\, S_{3,p}$ , $W_0 = 1$, $W_{-5} = 0.7$

$$f_{R|H_0}(r|H_0) = 2^{-5} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{d_{1,-5}\in\{-1,1\}} \sum_{d_{2,0}\in\{-1,1\}} \sum_{d_{2,-5}\in\{-1,1\}}$$
$$\sum_{d_{3,0}\in\{-1,1\}} \sum_{d_{3,-5}\in\{-1,1\}} e^{-\frac{\left(r+1-\sum_{k=2}^{3}\sum_{p\in\{0,-5\}} C_k W_p d_{k,p} - W_5 d_{1,-5}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{32}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Big[e^{-\frac{(r+1.7+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$
$$+ e^{-\frac{(r+1.7+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r+1.7-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r+0.3-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} \Big]$$

$$f_{R|H_1}(r|H_1) = \frac{1}{32}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Big[ e^{-\frac{(r-0.3+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r-0.3+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r-0.3+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r-0.3+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r-0.3+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+ e^{-\frac{(r-0.3+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\, e^{-\frac{(r-0.3-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(r-1.7-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}$$

, ) $f_R(r) = \frac{1}{2} f_{R|H_0}(r|H_0) + \frac{1}{2} f_{R|H_1}(r|H_1)$ in (a)

) $$P_r[H_0|r] = \frac{\frac{1}{2} f_{R|H_0}(r|H_0)}{f_R(r)}$$

$$P_r[H_1|r] = \frac{\frac{1}{2} f_{R|H_1}(r|H_1)}{f_R(r)}$$ in (a) and (b)

5. $f_{R|H_0}(r=0 \mid H_0)$

$$
= \frac{1}{3^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\Big[ e^{-\frac{(1.7+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-0.3C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-0.3C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-0.3C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-0.3C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3+1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-1.7C_2+1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-1.7C_2+0.3C_3)^2}{2\sigma^2}}
$$

$$
+ e^{-\frac{(1.7-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-1.7C_2-0.3C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(1.7-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(0.3-1.7C_2-1.7C_3)^2}{2\sigma^2}} \Big]
$$

$$
= f_{R|H_1}(r=0 \mid H_1)
$$

$\therefore$ $r=0$ is the decision boundary for all $C_2, C_3$.

6. Similar to Prob. 3.

$$P_e = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f_{R|H_0}(r|H_0)\,dr + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f_{R|H_1}(r|H_1)\,dr$$

$$= \frac{1}{32}\Big[\phi\left(\frac{-0.3+1.7C_2+1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+1.7C_2+1.7C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3+1.7C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+1.7C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3+1.7C_2-0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+1.7C_2-0.3C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3+1.7C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+1.7C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3+0.3C_2+1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+0.3C_2+1.7C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3+0.3C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+0.3C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3+0.3C_2-0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+0.3C_2-0.3C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3+0.3C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7+0.3C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3-0.3C_2+1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-0.3C_2+1.7C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3-0.3C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-0.3C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3-0.3C_2-0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-0.3C_2-0.3C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3-0.3C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-0.3C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3-1.7C_2+1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-1.7C_2+1.7C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3-1.7C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-1.7C_2+0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-0.3-1.7C_2-0.3C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-1.7C_2-0.3C_3}{\sigma}\right)$$

$$+\phi\left(\frac{-0.3-1.7C_2-1.7C_3}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-1.7-1.7C_2-1.7C_3}{\sigma}\right)$$

7.

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_{i+N-1} \end{bmatrix} \qquad \vec{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & m_{i-1} & \cdots & m_{i-L} \\ m_{i+1} & m_i & & m_{i-L+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{i+N-1} & m_{i+N-2} & \cdots & \end{bmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_L \end{bmatrix}$$

$$J_{MSE} = \left[\vec{r}_i - \vec{m}_i \vec{h}\right]^T \left[\vec{r}_i - \vec{m}_i \vec{h}\right]$$

$$= \vec{r}_i^{\,T} \vec{r}_i - 2 \vec{r}_i^{\,T} \vec{m}_i \vec{h} - \vec{h}^T \vec{m}_i^T \vec{m}_i \vec{h}$$

$$\left.\frac{J_{MSE}}{\partial \vec{h}}\right|_{\vec{h} = \hat{h}_{MMSE}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i \hat{h}_{MMSE} = \vec{m}_i^{\,T} \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \quad \hat{h}_{MMSE} = (\vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^{\,T} \vec{r}_i \quad , \quad E[\hat{h}_{MMSE}] = \vec{0}$$

Variance of $\hat{h}_{MSE}$

$$= \text{trace}\left\{ E\left[ (\hat{h}_{MMSE} - \vec{h})(\hat{h}_{MMSE} - \vec{h})^T \right] \right\}$$

$$-\vec{h} = (\vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i \vec{h} + (\vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^{\,T} \vec{n}_i$$

$$= \vec{h} + (\vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^{\,T} \vec{n}_i$$

Assume $(\vec{m}_i^{\,T} \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^{\,T} = B$

$$\hat{\vec{h}}_{MMSE} - \vec{h} = B\vec{n}_i$$

$$\mathrm{trace}\left\{ E\left[ (\hat{\vec{h}}_{MMSE} - \vec{h})(\hat{\vec{h}}_{MMSE} - \vec{h})^T \right] \right\}$$

$$= \mathrm{trace}\left\{ B \underbrace{E[\vec{n}_i \vec{n}_i^T]}_{= \sigma^2 I} B^T \right\}$$

$$= \mathrm{trace}\{BB^T\}\sigma^2$$

$$= \mathrm{trace}\left\{ (\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1} \vec{m}_i^T \vec{m}_i (\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1} \right\} \sigma^2$$

$$= \mathrm{trace}\left\{ (\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1} \right\} \sigma^2$$

Since $(\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1}$ is symmetric,

$\vec{m}_i^T \vec{m}_i = UDU^T$, where $D$ is eigen value matrix and $U$ is eigenvector matrix. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_{L+1} \end{bmatrix}$

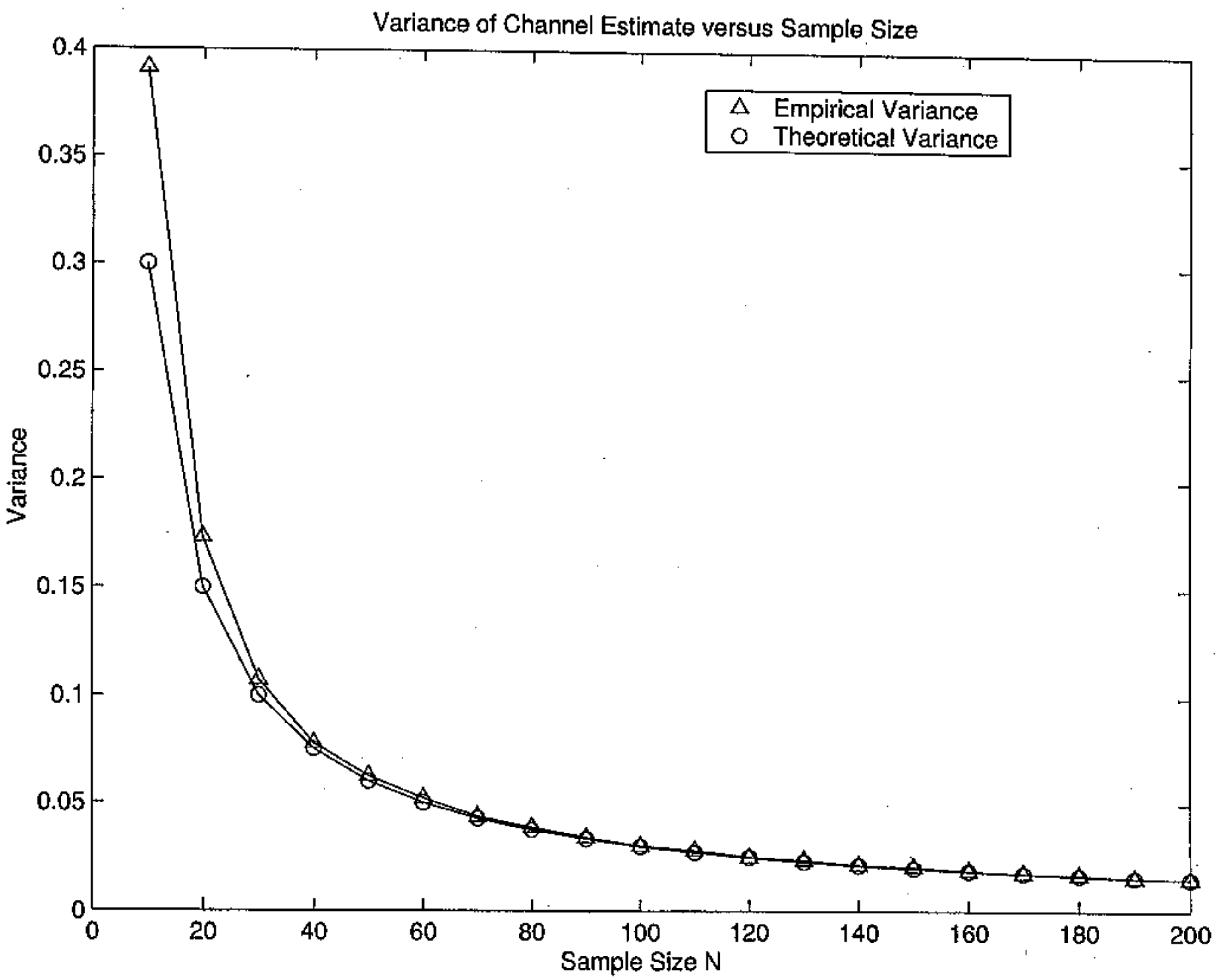
$$\mathrm{trace}\left\{ (\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1} \right\} \sigma^2$$

$$= \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{L+1}} \right) \sigma^2 \geq \frac{(L+1)^2}{\sum_{k=1}^{L+1} \lambda_i} \sigma^2$$

$$\sum_{k=1}^{L+1} \lambda_i = \sum_{k=0}^{L} \sum_{p=1}^{N-1} m_{i-k+p}^2 = (L+1)N$$

$$\therefore \mathrm{trace}\left\{ (\vec{m}_i^T \vec{m}_i)^{-1} \right\} \sigma^2 \geq \frac{(L+1)}{N} \sigma^2$$

```
% EE7000 Spring of 2003
% Homework 2 problem 8
% Dr. Hsiao-Chun Wu
clc;
clear;

N = 10:10:200;
var(length(N)) = 0;
L = 2;
h = randn(L+1,1);


MonteCarlo = 5000;
sweep = 0;
for i = 1 : length(N);

    sweep = sweep + 1;

    for trial = 1 : MonteCarlo

        m = sign(randn(N(sweep),L+1));

        if rank(m.'*m)==L+1
           n = randn(N(sweep),1);
           r = m*h + n;
           ht = inv(m.'*m)*m.'*r;
           var(sweep) = var(sweep) + 1/MonteCarlo * sum((h-ht).^2);
        else
           trial = trial - 1;
        end;

    end; % Monte Carlo Trials
end; % sample size N loop

plot(N,var,'r^')
hold on;
plot(N,(L+1)./N,'go')
plot(N,var,'r-')
plot(N,(L+1)./N,'g-')
hold off;
legend('Empirical Variance','Theoretical Variance');
title('Variance of Channel Estimate versus Sample Size')
xlabel('Sample Size N')
ylabel('Variance')
```


Variance of Channel Estimate versus Sample Size
Empirical Variance
Theoretical Variance
Variance
Sample Size N
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200